

Skript Zahlensysteme

Dieses Skript enthält die Themen meiner Unterrichtseinheit Zahlensysteme.

Hier sollen die Grundlagen für das Verständnis der darauf folgenden Inhalte zu den Abläufen „innerhalb des Computers“ (wie zum Beispiel die Codierung oder die Umwandlung analoger in digitale Signale) gelegt werden.

Die Aufgaben am Ende des Skriptes dienen der Übung und Vorbereitung auf die Lernerfolgskontrolle.

Inhalt

Zahlensysteme	1
Dezimalsystem (Zehnersystem).....	1
Dualsystem (Zweiersystem).....	1
Hexadezimalsystem (Sechzehnersystem).....	2
Umrechnungsverfahren	3
Dualzahlen in Dezimalzahlen	3
Dezimalzahlen in Dualzahlen	3
Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen.....	4
Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen.....	4
Dualzahlen in Hexadezimalzahlen.....	5
Hexadezimalzahlen in Dualzahlen.....	5
Signierte Dualzahlen	6
Darstellung negativer und positiver Dualzahlen.....	6
Komplementbildung	7
<i>Einerkomplement</i>	7
<i>Zweierkomplement</i>	7
Arithmetische Operationen mit Dualzahlen	8
Addition	8
Subtraktion mit Hilfe der Zweierkomplement-Addition	8
Aufgaben	9

Zahlensysteme

Dezimalsystem (Zehnersystem)

Zeichenvorrat: 10 Ziffern (0-9)

Dezimalzahl	5	4	7	9	,	2	6
Stellennummer	4	3	2	1		1	2
Stellenwert	10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}
Potenzwert	$5*1000$	$4*100$	$7*10$	$9*1$		$2/10$	$6/100$
Zahlenwert	$5000 + 400 + 70 + 9 + 0,2 + 0,06$ $=5479,26$						

Dualsystem (Zweiersystem)

Zeichenvorrat: 2 Ziffern (0,1)

Dualsystem	1	0	1	0	1	1	1	,	1	1
Stellennummer	7	6	5	4	3	2	1		1	2
Stellenwert	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		2^{-1}	2^{-2}
Potenzwert	$1*64$	$0*32$	$1*16$	$0*8$	$1*4$	$1*2$	$1*1$		$1*1/2$	$1*1/4$
Zahlenwert	$64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25$ $= 87,75$									

Hexadezimalsystem (Sechzehnersystem)

Zeichenvorrat: 10 Dezimalziffern (0-9) und 6 Buchstaben (A-F)

Stellenwert der Dualzahl	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
Dualzahl	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
Dezimalzahl	3				B				7				E , C							
Stellennummer	4				3				2				1		1					
Stellenwert	16^3				16^2				16^1				16^0		16^{-1}					
Potenzwert	3*4096				11*256				7*16				14*1		12/16					
Zahlenwert	12288				+ 2816				+ 112				+ 14		+ 0,75					
	=15230,75																			

Grundsätzlich gilt: Stellenwert vor dem Komma: $W = B^{n-1}$
 Stellenwert nach dem Komma: $W = B^{-n} = 1/B^n$

Umrechnungsverfahren

Dualzahlen → Dezimalzahlen

$$\begin{aligned}
 101110,011_2 &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\
 &= 32 + 8 + 4 + 2 + 1/4 + 1/8 \\
 &= 46,375_{10}
 \end{aligned}$$

Dezimalzahlen → Dualzahlen

Ganze positive Dezimalzahlen:

57_{10}

$57 : 2 = 28$	Rest	1	↑ Leserichtung ↓
$28 : 2 = 14$	Rest	0	
$14 : 2 = 7$	Rest	0	
$7 : 2 = 3$	Rest	1	
$3 : 2 = 1$	Rest	1	
$1 : 2 = 0$	Rest	1	

$= 111001_2$

Dezimalzahlen zwischen 1 und 0:

$0,375_{10}$

$0,375 \cdot 2 = 0,75$	→	$= 0,75$	Leserichtung
$0,75 \cdot 2 = 1,5$	→	$1,5 - 1 = 0,5$	
$0,5 \cdot 2 = 1,0$	→	$1,0 - 1 = 0$	

$= 0,011_2$

Hexadezimalzahlen → Dezimalzahlen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AFFE}_{16} &= A * 16^3 + F * 16^2 + F * 16^1 + E * 16^0 \\
 &= 10 * 4096 + 15 * 256 + 15 * 16 + 14 * 1 \\
 &= \mathbf{45054}_{10}
 \end{aligned}$$

Dezimalzahlen → Hexadezimalzahlen

Ganze positive Dezimalzahlen:

1998₁₀

$$\begin{array}{rcl}
 1998 : 16 = 124 & \text{Rest } 14 & \mathbf{E} \\
 124 : 16 = 7 & \text{Rest } 12 & \mathbf{C} \\
 7 : 16 = 0 & \text{Rest } 7 & \mathbf{7}
 \end{array}$$

= 7CE₁₆

↑
Leserichtung

Dezimalzahlen zwischen 1 und 0:

0,575₁₀

$$\begin{array}{rcl}
 0,575 * 16 = 9,2 & \longrightarrow & 9,2 - 9 = 0,2 \\
 0,2 * 16 = 3,2 & \longrightarrow & 3,2 - 3 = 0,2 \\
 0,2 * 16 = 3,2 & \longrightarrow & 3,2 - 3 = 0,2
 \end{array}$$

= 0,93 $\bar{3}$ ₁₆

↓
Leserichtung

Dualzahlen ↔ Hexadezimalzahlen

Dezimalzahl	Dualzahl	Hexadezimalzahl
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Dualzahlen → Hexadezimalzahlen

0010 | 1000 | 1111 | 1011 , 1000 | 1110 | 1000
 2 8 F B , 8 E 8₁₆

Hexadezimalzahlen → Dualzahlen

7 D A 2 4 , 3 9 C E₁₆
 0111 | 1101 | 1010 | 0010 | 0100 , 0011 | 1001 | 1100 | 1110

Signierte Dualzahlen

Darstellung negativer und positiver Dualzahlen

Bei *signierten Dualzahlen* wird durch das führende Bit - auch MSB (**M**ost **S**ignificant **B**it) - das Vorzeichen angegeben.

1	0	0	1	1	negativ signierte Dualzahl
0	1	1	0	1	positiv signierte Dualzahl

Beispiel: Vierstellige signierte Dualzahlen

Signierte Dualzahl	MSB als + oder - und zugehörige Dezimalzahl	Zugehörige Zahlengerade des Dezimalsystems
0 1 1 1	+7	+7
0 1 1 0	+6	+6
0 1 0 1	+5	+5
0 1 0 0	+4	+4
0 0 1 1	+3	+3
0 0 1 0	+2	+2
0 0 0 1	+1	+1
0 0 0 0	+0	+0
1 1 1 1	-7	-1
1 1 1 0	-6	-2
1 1 0 1	-5	-3
1 1 0 0	-4	-4
1 0 1 1	-3	-5
1 0 1 0	-2	-6
1 0 0 1	-1	-7
1 0 0 0	-0	-8

Im Dualsystem kann der Zahlenwert (dezimal) durch Änderung der Vorzeichen nicht sofort erkannt werden:

- | | |
|----------------|----------------|
| 1. 0 0 1 0 = 2 | 2. 0 1 1 0 = 6 |
| 1 0 1 0 = -6 | 1 1 1 0 = -2 |

Komplementbildung

Einerkomplement

$$\begin{array}{l}
 1. \quad 0 \ 1 \ 0 \ 1 = 5 \\
 \quad \quad 1 \ 0 \ 1 \ 0 = -6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 2. \quad 0 \ 1 \ 1 \ 0 = 6 \\
 \quad \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 = -7
 \end{array}$$

Durch das Vertauschen der Nullen und Einsen (Einerkomplement) entstehen Zahlen, die (zahlenmäßig) um 1 **größer** sind.

$$\begin{array}{l}
 3. \quad 1 \ 1 \ 1 \ 0 = -2 \\
 \quad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 1 = 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 4. \quad 1 \ 0 \ 0 \ 0 = -8 \\
 \quad \quad 0 \ 1 \ 1 \ 1 = 7
 \end{array}$$

Durch das Vertauschen der Nullen und Einsen (Einerkomplement) entstehen Zahlen, die (zahlenmäßig) um 1 **kleiner** sind.

Zweierkomplement

Umwandlung negative in positive und positive in negative Dualzahlen

1. Umwandlung +5 in -5

Zahl	0 1 0 1	5
Einerkomplement	1 0 1 0	-6
+1	+ 0 0 0 1	+1
Zweierkomplement	1 0 1 1	-5

2. Umwandlung -6 in +6

Zahl	1 0 1 0	-6
Einerkomplement	0 1 0 1	5
+1	+ 0 0 0 1	+1
Zweierkomplement	0 1 1 0	6

2. Umwandlung 0 in 0 (nicht wundern, hieran will ich etwas zeigen ;-)

Zahl	0 0 0 0	0
Einerkomplement	1 1 1 1	-1
+1	+ 0 0 0 1	+1
Zweierkomplement	(1) 0 0 0 0	0

Der Übertrag wird nicht beachtet!!

Arithmetische Operationen mit Dualzahlen

Addition

Duales Zahlensystem

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = (1)0$$

Übertrag

Dezimalzahlensystem

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

z.B.: 1 1 0 1

$$+ 1 0 0 1$$

$$1 \quad 1$$

← Übertrag →

$$1 0 1 1 0$$

13

$$+ 9$$

$$1$$

22

Subtraktion mit Hilfe der Zweierkomplement-Addition

Von den arithmetischen Funktionen beherrscht die CPU nur das Addieren. Eine Subtraktion wird als Addition einer negativen Zahl aufgefasst.

Beispiel: 7-3

2. Umwandlung +3 in -3

Zahl 0 0 1 1 3

Einerkomplement 1 1 0 0 -4

+1 + 0 0 0 1 +1

Zweierkomplement 1 1 0 1 -3

Addition:

0 1 1 1 7

+ 1 1 0 1 -3

= (1) 0 1 0 0 = 4

Aufgaben

(Hinweis: Liegt dieses Dokument als Word-Datei vor, sind die Lösungen „versteckt“ enthalten)

Schreibe zu allen Aufgaben den Rechenweg mit auf!

1. Rechne folgende Zahlen in das Dezimalsystem um:

$$1100_2 =$$

$$101010_2 =$$

$$101_{16} =$$

$$D2A_{16} =$$

$$1201_4 =$$

$$1201_6 =$$

2. a) Rechne folgende Zahlen in das Dualsystem um:

$$24_{10} =$$

$$57_{10} =$$

$$43_{10} =$$

b) Rechne ins Hexadezimalsystem

$$577_{10} =$$

$$20641_{10} =$$

3. Stelle folgende Zahl in einem Zahlensystem mit den drei Zeichen A (Wert 0), B (Wert 1) und C (Wert 2) dar.

$$19_{10} =$$

Stelle folgende Dezimalzahlen als signierte Dualzahl dar:

$$6_{10} =$$

$$-6_{10} =$$

$$4_{10} =$$

$$-4_{10} =$$

Berechne mit signierten Dualzahlen:

$$5 - 2 = 3$$